**Методические рекомендации**

**по теме «Основные приемы и методы решения систем уравнений»**

Учитель математики и информатики КГУ Каменская общеобразовательная школа

ОО района Байтерек УО акимата ЗКО Банников Андрей Геннадьевич

При решении систем уравнений применяются различные приемы и методы: метод линейного преобразования системы, метод приведения системы к дизъюнкции более простых систем, метод подстановки, метод исключения неизвестных, метод замены неизвестных и т. д.

Применяя эти методы (при определенных условиях), мы заменяем исходную систему равносильной ей более простой системой, а затем решаем эту более простую систему (или совокупность более простых систем).

Перейдем к изложению перечисленных выше методов решения систем уравнений.

1°. Метод линейного преобразования системы. Пусть дана система уравнений (1):

$$\left\{\begin{array}{c}f\_{1}\left(x,y\right)=0,\\f\_{2}\left(x,y\right)=0.\end{array}\right. $$

Будем говорить, что система уравнений (2)

$$\left\{\begin{array}{c}a\_{1}f\_{1}\left(x,y\right)+a\_{2}f\_{2}\left(x,y\right)=0,\\b\_{1}f\_{1}\left(x,y\right)+b\_{2}f\_{2}\left(x,y\right)=0\end{array}\right.$$

получена из системы уравнений (1) с помощью линейного преобразования (a1,a2,b1,b2 – заданные числа ), а число

$$∆=\left|\begin{matrix}a\_{1}&a\_{2}\\b\_{1}&b\_{2}\end{matrix}\right|=a\_{1}b\_{2}-a\_{2}b\_{1}$$

будем называть определителем этого линейного преобразования.

Такие преобразования применяются довольно часто при решении систем. Рассмотрим в качестве примера систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{c}f\_{1}\left(x,y\right)+f\_{2}\left(x,y\right)=0,\\f\_{1}\left(x,y\right)-f\_{2}\left(x,y\right)=0\end{array}\right.$$

Полученную из системы (1) сложением и вычитанием уравнений системы (1). Нетрудно проверить, что эта система равносильна системе (1).

 Естественно выяснить вопрос: в каком случае система (2), получающаяся из системы (1) линейным преобразованием, равносильна системе (1)? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

 Теорема 1. Если

$∆=\left|\begin{matrix}a\_{1}&a\_{2}\\b\_{1}&b\_{2}\end{matrix}\right|\ne 0$ (3)

то система (2) равносильна системе (1).

 Доказательство. Пусть (x0;y0) – решение системы (1). Тогда имеют место числовые равенства

$$f\_{1}\left(x\_{0},y\_{0}\right)=0,f\_{2}\left(x\_{0},y\_{0}\right)=0$$

Отсюда следует, что при любых a1,a2,b1,b2  справедливы числовые равенства

$$\begin{array}{c}a\_{1}f\_{1}\left(x,y\right)+a\_{2}f\_{2}\left(x,y\right)=0,\\b\_{1}f\_{1}\left(x,y\right)+b\_{2}f\_{2}\left(x,y\right)=0\end{array}$$

т.е (x0;y0) – решение системы.

 Докажем теперь, что если выполнено условие (3),то всякое решение системы (2) является решением и для системы (1). Пусть(x1;y1)-решения системы (2). Тогда имеют место числовые равенства

$\left\{\begin{array}{c}a\_{1}f\_{1}\left(x,y\right)+a\_{2}f\_{2}\left(x,y\right)=0,\\b\_{1}f\_{1}\left(x,y\right)+b\_{2}f\_{2}\left(x,y\right)=0\end{array}\right.$ (4)

Для сокращения записи введем обозначения

$$t\_{1}=f\_{1}\left(x\_{1},y\_{1}\right),t\_{2}=f\_{2}\left(x\_{1},y\_{1}\right)$$

Тогда система (4) примет вид

$\left\{\begin{array}{c}a\_{1}t\_{1}+a\_{2}t\_{2}=0\\b\_{1}t\_{1}+b\_{2}t\_{2}=0\end{array}\right.$ (5)

Докажем, что если $∆\ne 0$, то из (5) вытекают равенства

$t\_{1}=f\_{1}\left(x\_{1},y\_{1}\right)=0,t\_{2}=f\_{2}\left(x\_{1},y\_{1}\right)=0$ (6)

Рассмотрим систему двух уравнений

$\left\{\begin{array}{c}a\_{1}u+a\_{2}v=0\\b\_{1}u+b\_{2}v=0\end{array}\right.$ (7)

с двумя неизвестными u и v. Заметим, что, в силу равенств (5), пара чисел (t1; t2) образует решение системы (7). Пара чисел (0; 0) также, очевидно, является решением этой системы. Но так как определитель $∆=a\_{1}b\_{2}-b\_{1}a\_{2}$, системы (7) отличен от нуля (условие (3)), то система (7) имеет только одно решение. Значит, t1=0, t2=0.

Итак, мы доказали справедливость равенств (6). Следовательно,(х1, у1) - решение системы (1).

Теорема 1 доказана.

2°. Метод приведения системы к дизъюнкции более простых систем. Будем говорить, что система уравнений

$\left\{\begin{array}{c}f\_{1}\left(x,y\right)=0\\f\_{2}\left(x,y\right)=0\end{array}\right.$ (8)

равносильна дизъюнкции систем

$\left\{\begin{array}{c}g\_{1}\left(x,y\right)=0\\g\_{2}\left(x,y\right)=0\end{array}\right.$ (9)

и

$\left\{\begin{array}{c}φ\_{1}\left(x,y\right)=0\\φ\_{2}\left(x,y\right)=0\end{array}\right.$ (10)

если каждое решение системы (8) является решением хотя бы одной из систем (9), (10) и всякое решение каждой из систем (9), (10) является решением системы (8).

Вместо слов «система (8) равносильна дизъюнкции систем (9) и (10)» употребляют также слова «система (8) распадается на две системы (9) и (10)» или «система (8) равносильна совокупности систем (9) и (10)» .

Разумеется, можно говорить о равносильности системы уравнений (8) дизъюнкции трех и более систем уравнений.

Пример 2. Система уравнений

$$\left\{\begin{array}{c}x^{2}-y^{2}=0,\\xy-1=0\end{array}\right.$$

равносильна дизъюнкции систем

$\left\{\begin{array}{c}x-y=0,\\xy-1=0\end{array}\right.$ и $\left\{\begin{array}{c}x+y=0,\\xy-1=0\end{array}\right.$

Теорема 2. Если функции f1(x,y), f2(x,y),……, fk(x,y), g(x,y) определены на некотором множестве M, то на этом множестве система уравнений

$\left\{\begin{array}{c}f\_{1}\left(x,y\right), f\_{2}\left(x,y\right),…, f\_{k}\left(x,y\right)=0\\ g\left(x,y\right)=0\end{array}\right.$ (11)

равносильна дизъюнкции систем

$\left\{\begin{array}{c}f\_{1}\left(x,y\right)=0,\\g\left(x,y\right)=0,\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}f\_{2}\left(x,y\right)=0,\\g\left(x,y\right)=0,\end{array}\right.$ … $\left\{\begin{array}{c}f\_{k}\left(x,y\right)=0,\\g\left(x,y\right)=0.\end{array}\right.$ (12)

Доказательство. Пусть (х0; у0)$ \in $М, и пусть (х0; у0)$ $- решение системы (11). Тогда все функции, стоя щие в левых частях системы (11), определены при х=х0,y=y0 и справедливы числовые равенства

$\left\{\begin{array}{c}f\_{1}\left(x\_{0},y\_{0}\right), f\_{2}\left(x\_{0},y\_{0}\right),…, f\_{k}\left(x\_{0},y\_{0}\right)=0, ( 13)\\ g\left(x\_{0},y\_{0}\right)=0. (14)\end{array}\right.$

 Из (13) следует, что хотя бы одно из чисел fp(х0, у0) (p =1, 2, ..., k) равно нулю. Пусть, например,

f1(x0,y0)=0 . (15)

Из (14) и (15) следует, что (x0; y0.) — решение одной из систем (12), а именно системы

$$\left\{\begin{array}{c}f\_{1}\left(x,y\right)=0,\\g\left(x,y\right)=0\end{array}\right.$$

(причем (x0; y0.)$ \in $М). Обратно, пусть (х0; у0)$ $- решение системы

$\left\{\begin{array}{c}f\_{p}\left(x,y\right)=0,\\g\left(x,y\right)=0.\end{array}\right.$

(здесь р- одно из чисел 1, 2, ..., k), причем (х0: y0.) $\in $М. Тогда fp (x0, y0)=0, g(x0, y0)=0, причем в точке (х0, у0) все функции f1(x, y), .... fk(x, y) определены, откуда следует, что пара чисел (х0;y0.) удовлетворяет и системе (11). Теорема доказана.

Замечание. Всякое решение системы (11) есть решение одной из системы (12). Обратное, вообще говоря, неверно. Это связано с тем, что одна из систем (12) (например, система f1 (x, y)=0, g(x,y)=0) может иметь такое решение (х0: y0.), которое не входит в область определения какой-либо из функций f2(x, y), .... fk(x, y), а значит, не является решением системы (11).

Поэтому обычно при решении систем вида (11) поступают так. Находят все решения всех систем (12), а затем подстановкой в (11) отсеивают те из найденных решений, которые не удовлетворяют системе (11) (не входят в область определения левой части первого уравнения (11)). Предоставляем читателю доказать, что имеет место следующая более общая теорема.

Теорема 3. Если функции fp(x, y) и gm (x, y) (p=1..... k; m = 1, ..., n) определены на множестве М. То на этом множестве система уравнений

 $\left\{\begin{array}{c}f\_{1}\left(x,y\right), f\_{2}\left(x,y\right),…, f\_{k}\left(x,y\right)=0\\g\_{1}\left(x,y\right)g\_{2}\left(x,y\right)…g\_{n}(x,y)=0\end{array}\right.$

равносильна дизъюнкции kn систем

 $\left\{\begin{array}{c}f\_{p}\left(x,y\right)=0,\\g\_{m}\left(x,y\right)=0.\end{array}\right.$ (p=1,2..., k; m = 1,2, ...,n)

3°. Метод подстановки. Этот метод позволяет сводить решение системы уравнений с двумя неизвестными к решению одного уравнения с одним неизвестным. Обоснованием метода подстановки служит следующая теорема.

Теорема 4. Система уравнений

$\left\{\begin{array}{c}x=φ\left(y\right),\\F\left(x,y\right)=0\end{array}\right.$ (16)

равносильна системе уравнений

$\left\{\begin{array}{c}x=φ\left(y\right),\\F[φ\left(y\right),y]=0.\end{array}\right.$ (17)

 Доказательство. Пусть (х0: у0.) - решение системы (16). Тогда справедливы числовые равенства

$x=φ\left(y\right)$ (18)

$F\left(x\_{0},y\_{0}\right)=0$ (19)

Из (18) и (19) следует что,

$F[φ\left(y\_{0}\right),y\_{0}]=0$ (20)

Равенства (18) и (20) показывают, что (х0,: у0.) – решение системы (17).

 Обратно, пусть (x0; y0.) - решение системы (17). Тогда справедливы числовые равенства (18) и (20), откуда следует равенство (19). Из равенств (18) и (19) заключаем, что (х0, у0)-решение системы (16). Теорема доказана.

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{c}x=y^{2}+1\\xy=y^{2}+y^{3}\end{array}\right.$$

Решение. Исходная система, согласно теореме 4 равносильна системе уравнений

$\left\{\begin{array}{c}x=y^{2}+1\\(y^{2}+1)y=y^{2}+y^{3}\end{array}\right.$ т.е $\left\{\begin{array}{c}x=y^{2}+1\\y=y^{2}\end{array}\right.$

Последняя система распадается на две системы:

$\left\{\begin{array}{c}x=y^{2}+1\\y=0 \end{array}\right.$ и $\left\{\begin{array}{c}x=y^{2}+1\\y=1 \end{array}\right.$

Ответ : (1;0), (2;1)

4°. Метод исключения неизвестного. Пусть дана система уравнений

$\left\{\begin{array}{c}F\_{1}\left(x,y\right)=0,\\F\_{2}\left(x,y\right)=0\end{array}\right.$ (21)

и пусть одно из уравнений этой системы, например первое, можно разрешить относительно х (или у). Точнее, пусть уравнение F1(x, y)=0 равносильно уравнению х=φ(у). Тогда, в силу теоремы 4, система (21) равносильна системе

$\left\{\begin{array}{c}x=φ\left(y\right), (22)\\F\_{2}\left[φ\left(y\right),y\right]=0. (23)\end{array}\right.$

т. е. справедлива следующая теорема.

Tеоремa 5. Если уравнение F1(x, y)=0 равносильно уравнению x = φ(у), то система уравнений (21) равносильна системе (22)-(23).

Заметим, что решение системы (22)-(23) сводится к нахождению корней уравнения F2 [φ(y), y] = 0. Таким образом, мы исключили неизвестное х из системы и вместо системы должны решать уравнение с одним неизвестным. Поэтому такой прием решения и называется методом исключения неизвестного.

Если мы умеем находить все корни y1, y2,….,ym уравнения (23), то можно сразу написать все решения системы (21). Эти решения таковы:

(φ(y1);y1), (φ(y2);y2),…, (φ(ym);ym).

Пример 4. Найти действительные решения системы

$$\left\{\begin{array}{c}x+4=y^{3},\\x^{2}-y^{6}=8\end{array}\right.$$

Из первого уравнения находим x = y3 - 4 и подставляя во второе, получаем у3=1.

Уравнение y3=1имеет один действительный корень y=1.

Ответ : (-3;1).

5°. Метод замены неизвестных (введение новых неизвестных). Поясним вначале метод замены неизвестных на следующем примере.

Пример 5. Решить систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6}\\\frac{1}{x^{2}}-\frac{1}{y^{2}}=\frac{5}{36}\end{array}\right.$$

Решение. Введем новые неизвестные u=$\frac{1}{x}$, v=$\frac{1}{y}$. Тогда система примет вид

$$\left\{\begin{array}{c}u+v=\frac{5}{6}\\u^{2}-v^{2}=\frac{5}{36}\end{array}\right.$$

Эта система уравнений равносильна системе

$$\left\{\begin{array}{c}u+v=\frac{5}{6}\\u-v=\frac{1}{6}\end{array}\right.$$

имеющей единственное решение u =$\frac{1}{2}$, v=$\frac{1}{3}$. Следовательно, исходная система имеет одно решение (2; 3).

Ответ : (2; 3).

В общем случае метод замены неизвестных (для системы двух уравнений с двумя неизвестными) в следующем.

Пусть дана система уравнений

$\left\{\begin{array}{c}F\_{1}\left(x,y\right)=0\\F\_{2}\left(x,y\right)=0\end{array}\right.$ (24)

и пусть функции F1 (x, y) u. F2(x, y) можно представить в виде

$\left\{\begin{array}{c}F\_{1}\left(x,y\right)=f\_{1}\left[φ\_{1}\left(x,y\right),φ\_{2}\left(x,y\right)\right],\\F\_{2}\left(x,y\right)=f\_{2}\left[φ\_{1}\left(x,y\right),φ\_{2}\left(x,y\right)\right].\end{array}\right.$ (25)

Положим

 $φ\_{1}\left(x,y\right)=u$ $φ\_{2}\left(x,y\right)=v$

Тогда в силу (25) система (24) преобразуется к виду

$\left\{\begin{array}{c}f\_{1}\left(u,v\right)=0\\f\_{2}\left(u,v\right)=0\end{array}\right.$ (26)

 Предположим, что мы умеем решать систему (26), и пусть (uk; vk) (k= 1,2,..., n) все решения системы (26). Тогда, решив n систем уравнений

$\left\{\begin{array}{c}φ\_{1}\left(x,y\right)=u\_{k}\\φ\_{2}\left(x,y\right)=v\_{k}\end{array}\right.$(k=1,2,…,n) (27)

и объединив решения систем (27), мы найдем все решения системы (24).

Все рассмотренные методы имеют одну общую особенность: они позволяют заменить данную систему другой системой (или совокупностью систем), равносильной данной системе.