**Методические рекомендации**

**по теме «Основные приемы и методы решения систем уравнений»**

Учитель математики и информатики КГУ Каменская общеобразовательная школа

ОО района Байтерек УО акимата ЗКО Банников Андрей Геннадьевич

При решении систем уравнений применяются различные приемы и методы: метод линейного преобразования системы, метод приведения системы к дизъюнкции более простых систем, метод подстановки, метод исключения неизвестных, метод замены неизвестных и т. д.

Применяя эти методы (при определенных условиях), мы заменяем исходную систему равносильной ей более простой системой, а затем решаем эту более простую систему (или совокупность более простых систем).

Перейдем к изложению перечисленных выше методов решения систем уравнений.

1°. Метод линейного преобразования системы. Пусть дана система уравнений (1):

Будем говорить, что система уравнений (2)

получена из системы уравнений (1) с помощью линейного преобразования (a1,a2,b1,b2 – заданные числа ), а число

будем называть определителем этого линейного преобразования.

Такие преобразования применяются довольно часто при решении систем. Рассмотрим в качестве примера систему уравнений

Полученную из системы (1) сложением и вычитанием уравнений системы (1). Нетрудно проверить, что эта система равносильна системе (1).

Естественно выяснить вопрос: в каком случае система (2), получающаяся из системы (1) линейным преобразованием, равносильна системе (1)? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 1. Если

(3)

то система (2) равносильна системе (1).

Доказательство. Пусть (x0;y0) – решение системы (1). Тогда имеют место числовые равенства

Отсюда следует, что при любых a1,a2,b1,b2  справедливы числовые равенства

т.е (x0;y0) – решение системы.

Докажем теперь, что если выполнено условие (3),то всякое решение системы (2) является решением и для системы (1). Пусть(x1;y1)-решения системы (2). Тогда имеют место числовые равенства

(4)

Для сокращения записи введем обозначения

Тогда система (4) примет вид

(5)

Докажем, что если , то из (5) вытекают равенства

(6)

Рассмотрим систему двух уравнений

(7)

с двумя неизвестными u и v. Заметим, что, в силу равенств (5), пара чисел (t1; t2) образует решение системы (7). Пара чисел (0; 0) также, очевидно, является решением этой системы. Но так как определитель , системы (7) отличен от нуля (условие (3)), то система (7) имеет только одно решение. Значит, t1=0, t2=0.

Итак, мы доказали справедливость равенств (6). Следовательно,(х1, у1) - решение системы (1).

Теорема 1 доказана.

2°. Метод приведения системы к дизъюнкции более простых систем. Будем говорить, что система уравнений

(8)

равносильна дизъюнкции систем

(9)

и

(10)

если каждое решение системы (8) является решением хотя бы одной из систем (9), (10) и всякое решение каждой из систем (9), (10) является решением системы (8).

Вместо слов «система (8) равносильна дизъюнкции систем (9) и (10)» употребляют также слова «система (8) распадается на две системы (9) и (10)» или «система (8) равносильна совокупности систем (9) и (10)» .

Разумеется, можно говорить о равносильности системы уравнений (8) дизъюнкции трех и более систем уравнений.

Пример 2. Система уравнений

равносильна дизъюнкции систем

и

Теорема 2. Если функции f1(x,y), f2(x,y),……, fk(x,y), g(x,y) определены на некотором множестве M, то на этом множестве система уравнений

(11)

равносильна дизъюнкции систем

… (12)

Доказательство. Пусть (х0; у0)М, и пусть (х0; у0)- решение системы (11). Тогда все функции, стоя щие в левых частях системы (11), определены при х=х0,y=y0 и справедливы числовые равенства

Из (13) следует, что хотя бы одно из чисел fp(х0, у0) (p =1, 2, ..., k) равно нулю. Пусть, например,

f1(x0,y0)=0 . (15)

Из (14) и (15) следует, что (x0; y0.) — решение одной из систем (12), а именно системы

(причем (x0; y0.)М). Обратно, пусть (х0; у0)- решение системы

(здесь р- одно из чисел 1, 2, ..., k), причем (х0: y0.) М. Тогда fp (x0, y0)=0, g(x0, y0)=0, причем в точке (х0, у0) все функции f1(x, y), .... fk(x, y) определены, откуда следует, что пара чисел (х0;y0.) удовлетворяет и системе (11). Теорема доказана.

Замечание. Всякое решение системы (11) есть решение одной из системы (12). Обратное, вообще говоря, неверно. Это связано с тем, что одна из систем (12) (например, система f1 (x, y)=0, g(x,y)=0) может иметь такое решение (х0: y0.), которое не входит в область определения какой-либо из функций f2(x, y), .... fk(x, y), а значит, не является решением системы (11).

Поэтому обычно при решении систем вида (11) поступают так. Находят все решения всех систем (12), а затем подстановкой в (11) отсеивают те из найденных решений, которые не удовлетворяют системе (11) (не входят в область определения левой части первого уравнения (11)). Предоставляем читателю доказать, что имеет место следующая более общая теорема.

Теорема 3. Если функции fp(x, y) и gm (x, y) (p=1..... k; m = 1, ..., n) определены на множестве М. То на этом множестве система уравнений

равносильна дизъюнкции kn систем

(p=1,2..., k; m = 1,2, ...,n)

3°. Метод подстановки. Этот метод позволяет сводить решение системы уравнений с двумя неизвестными к решению одного уравнения с одним неизвестным. Обоснованием метода подстановки служит следующая теорема.

Теорема 4. Система уравнений

(16)

равносильна системе уравнений

(17)

Доказательство. Пусть (х0: у0.) - решение системы (16). Тогда справедливы числовые равенства

(18)

(19)

Из (18) и (19) следует что,

(20)

Равенства (18) и (20) показывают, что (х0,: у0.) – решение системы (17).

Обратно, пусть (x0; y0.) - решение системы (17). Тогда справедливы числовые равенства (18) и (20), откуда следует равенство (19). Из равенств (18) и (19) заключаем, что (х0, у0)-решение системы (16). Теорема доказана.

Пример 3. Решить систему уравнений

Решение. Исходная система, согласно теореме 4 равносильна системе уравнений

т.е

Последняя система распадается на две системы:

и

Ответ : (1;0), (2;1)

4°. Метод исключения неизвестного. Пусть дана система уравнений

(21)

и пусть одно из уравнений этой системы, например первое, можно разрешить относительно х (или у). Точнее, пусть уравнение F1(x, y)=0 равносильно уравнению х=φ(у). Тогда, в силу теоремы 4, система (21) равносильна системе

т. е. справедлива следующая теорема.

Tеоремa 5. Если уравнение F1(x, y)=0 равносильно уравнению x = φ(у), то система уравнений (21) равносильна системе (22)-(23).

Заметим, что решение системы (22)-(23) сводится к нахождению корней уравнения F2 [φ(y), y] = 0. Таким образом, мы исключили неизвестное х из системы и вместо системы должны решать уравнение с одним неизвестным. Поэтому такой прием решения и называется методом исключения неизвестного.

Если мы умеем находить все корни y1, y2,….,ym уравнения (23), то можно сразу написать все решения системы (21). Эти решения таковы:

(φ(y1);y1), (φ(y2);y2),…, (φ(ym);ym).

Пример 4. Найти действительные решения системы

Из первого уравнения находим x = y3 - 4 и подставляя во второе, получаем у3=1.

Уравнение y3=1имеет один действительный корень y=1.

Ответ : (-3;1).

5°. Метод замены неизвестных (введение новых неизвестных). Поясним вначале метод замены неизвестных на следующем примере.

Пример 5. Решить систему уравнений

Решение. Введем новые неизвестные u=, v=. Тогда система примет вид

Эта система уравнений равносильна системе

имеющей единственное решение u =, v=. Следовательно, исходная система имеет одно решение (2; 3).

Ответ : (2; 3).

В общем случае метод замены неизвестных (для системы двух уравнений с двумя неизвестными) в следующем.

Пусть дана система уравнений

(24)

и пусть функции F1 (x, y) u. F2(x, y) можно представить в виде

(25)

Положим

Тогда в силу (25) система (24) преобразуется к виду

(26)

Предположим, что мы умеем решать систему (26), и пусть (uk; vk) (k= 1,2,..., n) все решения системы (26). Тогда, решив n систем уравнений

(k=1,2,…,n) (27)

и объединив решения систем (27), мы найдем все решения системы (24).

Все рассмотренные методы имеют одну общую особенность: они позволяют заменить данную систему другой системой (или совокупностью систем), равносильной данной системе.