|  |  |
| --- | --- |
|  | Биримжанова Г.Т. 4 курс студенті  Ғылыми жетекші:  Асканбаева Г.Б. аға оқытушы,  «Математика» кафедрасы  А. Байтұрсынов атындағы  Қостанай өңірлік университеті,  ҚР, Қостанай қ. |

**МЕКТЕП КУРСЫ МАТЕМАТИКАСЫНДА ШЕКТЕР ТЕОРИЯСЫН ОҚЫТУДЫҢ ӘДІСТЕМЕЛІК ЕРЕКШЕЛІКТЕРІ**

***Аннотация:*** Шектер теориясы – бұл математикалық талдаудың бір бөлімі. Әр түрлі геометриялық денелердің аудандары мен көлемдерін есептеу кезінде шекті ауысу ұғымын ежелгі Греция ғалымдары, әсіресе ежелгі грек математигі, физигі және инженері Архимедтің еңбектерінде қолданған.

Шектер теориясы ары қарай белсенділігін 17 ғ. дифференциалды және интегралды есептеулерді құруда, ең алдымен ағылшын физигі, математигі, механигі және астрономы Исаак Ньютонның (1642 – 1727 жж.) еңбектерінде қолданысын тапты.

Шек ұғымының анықтамасы алғаш рет ағылшын математигі Джон Уоллистің (1616 – 1703 жж.) «Шексіз шамалардың арифметикасы» еңбегінде енгізілді. Тек 19 ғ. Ұлы француз математигі және механигі Августин Луи Кошидің (1789 – 1857 жж.) еңбектерінде математикалық талдауды қатаң негіздеу үшін шектеулер теориясы қолданылды.

**Түйін сөздер:** шек, үзіліссіздік, функция, анықталу облысы, мәндер жиыны.

|  |  |
| --- | --- |
|  | Birimzhanova G.T. 4th year student  Scientific supervisor:  Askanbayeva G.B. senior lecturer  Department of" mathematics"  A. Baitursynov  Kostanay regional university,  Kazakhstan, Kostanay |

**METHODOLOGICAL FEATURES OF TEACHING THEORY OF BORDERS IN SCHOOL COURSE MATHEMATICS**

***Abstract:*** Boundary theory is a part of mathematical analysis. The concept of boundary displacement was used by ancient Greek scientists, especially in the works of the ancient Greek mathematician, physicist and engineer Archimedes, when calculating the areas and volumes of different geometric bodies.

The theory of limits further developed in the 17th century. in the construction of differential and integral calculus, first of all in the works of the English physicist, mathematician, mechanic and astronomer Isaac Newton (1642 - 1727).

The definition of the limit was first introduced in the work of the English mathematician John Wallis (1616 - 1703) "Arithmetic of infinite quantities." Only in the 19th century. In the works of the great French mathematician and mechanic Augustine Louis Cauchy (1789 - 1857) the theory of constraints was used to strictly justify mathematical analysis.

***Keywords:*** limit, continuity, function, definition area, set of values.

Бұл мақаладашектер теориясын мектеп курсы математикасында оқыту әдістемесінің ерекшеліктері қарастырылды.

**Функцияның үзіліссіздігі мен шегі туралы түсініктерді қалыптастыру тәсілдерінің бірі**

Бұл тәсіл келесі тұжырымдарға негізделген:

* Функцияның үзіліссіздігі мен шегі ұғымдары алдымен көрнекі – интуитивтік бейнелеу негізінде құрылуы керек, яғни шекті анықтауды формальды – логикалық енгізу алдында оқушылардың алдыңғы тәжірибесін барынша пайдалана отырып, мағынасын түсіндіру жүргізіледі.Тиісінше, ұғымдарды меңгеру деңгейін бағалау негізінен нүктедегі функция шегінің немесе нүктедегі функцияның үзіліссіздігінің анықтамаларын анықтау мүмкіндігімен емес, «тану» деңгейінде жүзеге асырылуы тиіс, яғни оқушы белгілі бір жағдайларда функцияның нүктеде шегі бар ма, үзіліссіз бе, т.б. сұрақтарға жауап беруі керек.
* Функцияның нүктедегі шегі мен функцияның үзіліссіздігі туралы ұғымдар зерттеудің басынан бастап олардың арасындағы қатынастардың ашылуымен тығыз байланыста болуы керек.
* Нүктедегі функцияның үзіліссіздігі ұғымының анықтамасы үзіліссіздік функцияның сипаттамалық қасиетіне сүйене отырып қалыптасады: нүктесіндегі үзіліссіз функцияның мәні аргументтің шамалы өзгеруінен өзгереді, яғни .

Тақырыпты зерттеуді тоғыз жылдық мектепте оқушылар алған функция туралы ақпаратты қайталаудан бастаған жөн: функция ұғымы, оның анықталу облысы, мәндер жиыны, функцияның берілу тәсілдері, функция графигі.

Оқушылардың әртүрлі функциялардың «қорын» білуін және олардың графиктері туралы нақты идеяларды құра алатындарын тексеру. Ең алдымен, оқушылардың тоғыз жылдық мектеп курсында кездестірген функциялардың графиктерін түсінетініне көз жеткізу керек (функция әліппесі)

,  , , , , , , , , .

Берілген функциялардың графиктерін алдын ала дайындап, сәйкес формулаларды басқа ретпен жазып, содан кейін оқушыларға функция мен графиктерді сәйкестендіруге беруге болады.

Оқушылар график салудағы жұмыс барысын, оның нобайын (мысалы, түзу – екі нүкте арқылы, парабола – үш нүкте арқылы) сала білуді және келесі сұрақтарға дұрыс жауап берулері керек:

1. Анықталу облысының мәні;
2. Функцияның мәндер жиыны;
3. Функция қандай аралықтарда кемиді(өседі);
4. Қай нүктеде нөлге тең болады, қай жерде, қай жерде теріс және т.б.

Барлық берілген сұрақтарға оқушылар график бойынша жауап береді.

Мақсаты – оқушыларға функцияның қасиеттері мен оның графикалық көрінісі арасындағы байланысты еске түсіру. «Әліппемен» жұмыс істеумен қатар «Функцияның шегі және үзіліссіздігі» тақырыбын оқу кезінде пайда болатын көрнекі мысалдар қорын құруды бастау керек.

Осы функциялардың сызбалық – кестесін құрыңыз

Үзіліссіздік және шек ұғымдарын түсіну үшін келесі жаттығуларды орындау тиімді:

Функция мәндеріне сәйкес *x* мәндерін көрсету:



Бұл жаттығулар нақты мәндері бар нақты графиктерде қарастырылуы керек. Тапсырмалар деңгейі бойынша өсу ретімен орналасқан. Олардың ішіндегі ең маңыздысы - соңғы тапсырма. Оны оқушыларға басқа тұжырымдамаларда ұсыну керек:

« теңсіздігі орындалатын нүктесінің маңайын көрсетіңіз.»

«мәндері мәніне шамамен ға дейін тең болатын нүктесінің маңайын жазыңыз?»

« теңдігі дейін ақиқат болуы үшін жуық теңдігінің дәлдігі қандай болуы керек?»

Бұл жаттығуларды талдау кезінде оқушыларды үш мәлімдеменің баламалылығына назар аударту керек:

«»;

« мәндері радиусының маңайында жатыр»;

« дәлдігіне дейін».

Интуитивті – көрнекі деңгейде үзіліссіздік және шек үғымдарын түсіндіруді ең алдымен, мектеп курсында анықталу облысы немесе интервал, не интервалдар бірлестігі болып табылатын функциялар үшін үзіліссіздік ұғымы нақты қарастырылатынын атап өтеміз. Сондықтан функцияның үзіліссіздігі қарапайым көрнекі мағынаға ие: функция нүктесінде үзіліссіз болады, егер оның графигі кезінде үзілмесе, яғни осы нүкте арқылы график сызу кезінде қарындашты қағаз бетінен алмауға болады.

Үзіліссіз және кейбір нүктелерде үзіліссіз емес функциялар арасындағы айырмашылықты түсіндіру үшін келесідей графиктер жиынтығын пайдалану ыңғайлы:

1-ші және 5-ші функциялардың графиктері бір – бірінен тек бір нүктемен ғана ерекшеленеді. Бұл графиктер функцияның нүктедегі және шектегі үзіліссіздігі туралы түсініктерді қалыптастыру жұмысында «көрнекі құрал» қызметін атқаратын болады.

1. Егер нүктесіндегі функцияның графигі «үзілмесе», онда функция осы нүктеде үзіліссіз деп аталады.
2. Егер нүктесіндегі функцияның графигі «үзілсе», онда функция осы нүктеде үзілісті деп аталады.

Бұл түсініктемелерді келесі жаттығуларда тексеруге болады:

1. 1-ші және 6-шы функциялардың ішінен нүктелеріндегі үзіліссіздікті көрсетіңіз.
2. 1-ші және 6-шы функциялардың ішінен көрсетіңіз:
3. Сандар түзуінің әрбір нүктесінде үзіліссіз;
4. Кейбір нүктелерде үзіліссіз болмайтынын (нақты қай нүктеде екенін көрсетіңіз).

Уақыт қалған жағдайда, «әліппенің» функциялары туралы осыған ұқсас сұрақтар қоюға болады.

Егер бұл сұрақтар қиындық тудырмаса, күрделі, бірақ өте маңызды тапсырмаларға көшуге болады.

Кез келген *f* функциясының графигін салу:

1. нүктесінде үзіліссіз емес, бірақ осы нүктеде анықталған;
2. Тек нүктесінде үзіліссіз емес және осы нүктеде анықталмаған;
3. Үзіліссіз болмайтын екі нүктенің болуы;
4. нүктесінен басқа барлық нүктелерде үзіліссіз, ;
5. Сандық түзудің барлық нүктелерінде үзіліссіз және т.б.

Оқушылар үзіліссіздіктің интуитивті – көрнекі деңгейінің мағынасын меңгергеннен кейін, келесі үзіліссіз функцияның сипаттамалық қасиеті кезеңіне өтуге болады.

Нүктедегі үзіліссіз функцияның сипаттамалық қасиетін түсіндіруді кез келген графикті қарастыру арқылы жүзеге асыруға болады, мысалы мына функцияның графигін қарастырсақ:

Осыдан келесі сұрақтар туындайды:

1. мәндері нешеге тең? (оқушылар дұрыс формуланы таңдап, нәтижені есептеу керек)
2. болсын. мәнін қалай есептейді? (оқушы есептеу үшін қандай формуланы қолданатынын айтуы керек, егер ол бірден шамамен болатынын айтса, бұл жауабын дәлелдеуі керек)
3. болсын. мәні шамамен нешеге тең?
4. болсын, мысалы . Онда мәні шамамен –ге тең деп айтуға болады ма?
5. болсын. мәні шамамен нешеге тең?

Осы сұрақтардың барлығына жауап бере отырып оқушылар болғанда, болатынын байқайды.

Осыдан кейін оқушыларға келесі сұрақты қою керек: « екені анықталды. Алдыңғы жағдайлардағыдай, егер болса, деп тұжырымдауға болады ма?»

Графикка қарап оқушылар бұл тұжырымды растауға болмайтынын байқайды. Басқа мысалдарды қарастыра келе: үшін , үшін және т.б. Осыдан нүктесінде үзіліссіз функция үшін келесі мәлімдеме дұрыс деген қорытындыға келеміз: егер болса, онда Егер де функциясы нүктесінде үзіліссіз болмаса, онда бұл бекіту ол үшін дұрыс емес деген қорытындыға келеміз.

Келесі сұрақтарды талдау арқылы оқушыларға үзіліссіз функцияның сипаттамалық қасиетінің шынайылығын сезінуге мүмкіндік бере аламыз: «Егер шаршының қабырғасы шамамен 3 метр екені белгілі болса, онда оның ауданы шамамен нешеге тең?»; «Сағатына 5 км жылдамдықпен келе жатқан жаяу жүргінші шамамен 2 сағатта қанша жол жүреді?»

Оқушылар жауап беру мүмкіндігі  функциясы x=3 нүктесінде және функциясы нүктесінде үзіліссіздігімен байланысты екенін түсінуі керек.

Оқушылар үзіліссіз функцияның сипаттамалық қасиетін меңгергеннен кейін, нүктедегі үзіліссіз функцияның шегі туралы ұғымды қалыптастыруға кірісуге болады.

Нүктедегі үзіліссіз функцияның шегі туралы түсінікті қалыптастыру үшін реттілік шегінің анықтамасын еске түсіру қажет (егер бұл анықтама бұрын енгізілген болса):

теңдігі қандай да бір саннан бастап (яғни барлық үшін) кез – келген оң үшін, теңсіздігі орындалатынын білдіреді. Басқаша айтқанда, дейін барлық үлкен n үшін жеткілікті.  ( n>N үшін) теңдігін, нүктесінде үзіліссіз функция үшін ) теңдігімен салыстыру, нүктесіндегі үзіліссіз функцияның мәні неге функциясының шегі деп  деп аталатынын түсіндіру керек; мұғалім «егер функция  нүктесінде үзіліссіз болса, онда кез – келген оң ε,  үшін (яғни, нүктесінің кейбір маңайында) ε» дейін. Демек,  теңдігі реттілік шегіндегідей  үшін мәнін білдіреді. Тырнақшаға алынған сөйлем нүктесіндегі функцияның үзіліссіздігінің дәл анықтамасы болып табылады. Оқушылардың түсінгенін немесе түсінбегенін мысалдар арқылы тексеруге болады. Міне, осындай мысалдардың кейбір нұсқалары:

1. болсын.  табу.

f функциясы x=3 нүктесінде үзіліссіз (график бұл нүктеде үзілмейді). Демек, . Бұл теңсіздік үшін білдіреді. Дарынды оқушыларға мына тапсырманы ұсынуға болады: үшін 0,1 – ге дейінгі дәлдікпен график бойынша нүктесінің маңайын табу және т.б.

1. болсын.

нүктесінде бұл функция үзіліссіз (график бойынша). Сондай – ақ, егер  болса, онда . Алайда, егер функция үзіліссіз болатын нүктесін алсақ, онда кезінде міндетті түрде -ге жақын болмайды. Мысалы, үшін алатынымыз: , ал үшін алады.

Жалпы алғанда, бүтін санның кез – келген маңындағы х мәндері үшін бұл функцияның жуық мәнін көрсету мүмкін емес. Сонымен, нүктесінде үзіліссіз функциясының ретіндегі шегі осы функциясының нүктесіндегі мәні, яғни , бұл үшін дегенді білдіреді. Дегенмен, нүктесінде үзіліссіз емес, бірақ ге жақын х үшін әрекеті үзіліссіз функциялардың әрекетіне ұқсас функциялар бар.

Мысалы болсын.

- ден басқа барлық х үшін функция үзіліссіз; нүктесінде функция үзіліссіз емес. үшін функция мәндері 2 – ге жақын, бірақ емес. Функция нүктесінде үзіліссіз болмаса да, осы нүктеге жақын жерде функцияның мәндеріне шамамен тең болатын сан әлі де бар екенін көреміз. 2 саны функцияны үзіліссіз етеді («жабады» немесе дәлірек айтқанда, графиктегі үзілісті «жояды»). Осыдан кейін келесі түсініктеме беріледі:

Егер f функциясы нүктесінде үзіліссіз болмаса, бірақ осы функцияның нүктесінің маңайына шамамен тең болатын кейбір саны болса,онда бұл сан кезінде f функциясының шегі деп аталады; жазылуы: . Бұл белгілеу, егер , онда ; дәлірек айтқанда, оң саны қандай болса да, нүктесінің маңайын көрсетуге болатынын білдіреді, онда функцияның мәні шамамен -ға дейінгі а санына тең. Бұл жерде теңдік шамамен нүктесінің өзі, маңайдың ортасы үшін орындалмайтынын атап өтуіміз керек. Сонымен, үшін функциясының шегін табу есебін шешу кезінде, келесі жағдайлар орын алуы мүмкін:

1. Егер функция нүктесінде үзіліссіз болса, яғни үшін, онда .
2. Егер функция нүктесінде үзіліссіз болмаса, бірақ үшін болатындай сан болса, онда .
3. Егер мұндай *а* саны жоқ болса, яғни *х,*-ге жақын болғанда функцияның мәндері шамамен неге тең болатынын айту мүмкін емес болса, онда олар - ге ұмтылған кезде функциясының шегі жоқ дейді. Бастапқы бекітуде оқушыларға – ге ұмтылған кездегі функцияның шегін табуға арналған жаттығуларды ұсыну пайдалы:

Бұл кезеңде барлық мысалдардың шешімі графикқа сілтемемен қоса берілуі керек (бірақ оны сызу қажет емес). Сондықтан олардың барлығы оқушылар функцияның графигі қандай болатынын білуі немесе болжай алатындай етіп таңдалады.

2 – ші және 3 – ші тапсырмаларды орындау кезінде оқушылар қандай түсініктеме беру керектігін көрсетейік:

2) функциясы барлық нақты сандар жиынында үзіліссіз (график үздіксіз сызық), демек үшін де. Демек, шек функцияның 2 нүктесіндегі мәніне тең. Демек, . Дәптерге келесі жазба жеткілікті: «(үзіліссіз функция)».

3) функциясы нүктесінде үзіліссіз емес. Бірақ барлық басқа нүктелерде бұл функция функциясымен сәйкес келеді. Сондықтан үшін бұл функциялардың шектері сәйкес келеді. Соңғы функция үзіліссіз болғандықтан, шегі -1 нүктесіндегі функцияның мәніне тең. Бұл жаттығуды жазбаша түрде орындаған кезде, түсініктемелерді қалдырып, келесідей шешімдерді жазуға болады:

*.*

Ауызша жауап беру кезінде оқушылар шектік таңбаның астындағы бөлшекті неліктен азайтуға болатынын түсіндіре алуы керек (функциялар әртүрлі болғанымен, – ден басқа барлық нүктелерде олардың мәндері бірдей, сондықтан олардың шектері тең), сондықтан бұл үзіліссіз функцияның шегін оған тең үзіліссіз функцияның шегімен ауыстырамыз.

Функцияның нүктедегі шегін оқушылардың көрнекі бейнелерін қалыптастыру кезеңінің соңында нүктесінің маңайында шегі бар қандай форманың графигі болуы мүмкін екенін оқушылармен бірге анықтау пайдалы. Үш негізгі жағдай болуы мүмкін:

1. График кезінде «үзілмейді»;
2. нүктесінде алынған графиктің нүктесі «тесілген»;
3. кезінде алынған график нүктесі «секіріп кетті».

Оқушылар функциялардың шегін тауып үйренгеннен кейін, графикті салып немесе елестете алғаннан кейін ғана, олар басқа функциялардың шектерін табуға көше алады.

**Пайдаланған әдебиеттер тізімі:**

1 Алгебра және анализ бастамалары: Жалпы білім беретін мектептің жаратылыстану – математика бағытындағы 10 – сыныбына арналған оқулық. 2 – бөлім / А.Е. Әбілқасымова. Т.П. Кучер , В.Е. Корчевский, З.Ә.Жұмағұлова. – Алматы: Мектеп, 2019 – 176 б.

2 Алгебра және анализ бастамалары: Жалпы білім беретін мектептің жаратылыстану – математика бағытындағы 10 – сыныбына арналған оқулық / Ә.Н. Шыныбеков. Д.Ә. Шыныбеков, Р.Н. Жұмабаев. – Алматы: Атамұра, 2019. – 272 бет.

3 Алгебра және анализ бастамалары: Жалпы білім беретін мектептің қоғамдық – гуманитарлық бағытындағы 10 – сыныбына арналған оқулық / А.Е.Әбілқасымова, З.Ә. Жұмағұлова. – Алматы: Мектеп, 2019 – 152 б.

4 Галицкий М.Л. и др. Углубленное изучение курса алгебры и математического анализа: метод, рекомендации и дидакт. Материалы: Пособие для учителя / М.Л. Галицкий, М.М. Мошкович, С.И. Шварцбурд. – 2 – е изд., дораб,- М.: Просвещение, 1990. – 352 с.

5 Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Рабинович Е.М., Якир М.С. Учимся решать задачи по началам анализа.- К.: Магистр – S, 1998.