**Урок №8.**

**Тема: Предел функции в точке и на бесконечности. Вычисление пределов.**

**Теоретическая часть:**

**Число *А*** называется ***пределом функции*** *f*(*x*) в точке *х0*, если для любого числа ε > 0 существует число δ > 0 (зависящее от ε) такое, что для всех https://helpiks.org/helpiksorg/baza7/441968348411.files/image068.gif и удовлетворяю­щих неравенству https://helpiks.org/helpiksorg/baza7/441968348411.files/image070.gif, выполняется неравенство https://helpiks.org/helpiksorg/baza7/441968348411.files/image072.gif .

Геометрический смысл этого определения состоит в том, что если число *А* является пределом функции *f*(*x*) в точке *х0*, то для всех значений аргумента *х*, содержащихся в δ – окрестности точки *х0* , соот­ветствующие значения функции попадут в ε – окрестность числа *А*(рис. 1):

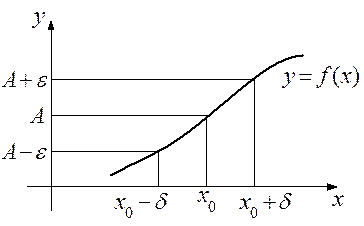


Рис.1.

**Любой предел состоит из трех частей**: например: http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image002.gif

1) Всем известного значка предела http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image004.gif. (лимит-ограничение)  
2) Записи под значком предела, в данном случае http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image006.gif. Запись читается «икс стремится к единице». Чаще всего – именно http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image008.gif, хотя вместо «икса» на практике встречаются и другие переменные. В практических заданиях на месте единицы может находиться совершенно любое число, а также бесконечность (http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image010.gif).  
3) Функции под знаком предела, в данном случае http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image012.gif.

Сама запись http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image002_0000.gif читается так: «предел функции http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image012_0000.gif при икс стремящемуся к единице».

Разберем следующий важный вопрос – а что значит выражение «икс **стремится** к единице»? И что вообще такое «стремится»?  
Понятие предела – это понятие, если так можно сказать, **динамическое**. Построим последовательность: сначала http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image016.gif, затем http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image018.gif, http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image020.gif, …, http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image022.gif, ….  
То есть выражение «икс **стремится** к единице» следует понимать так – «икс» последовательно принимает значения, **которые бесконечно близко приближаются к единице и практически с ней совпадают**.

Как решить вышерассмотренный пример? Исходя из вышесказанного, нужно просто подставить единицу в функцию, стоящую под знаком предела:

http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image024.gif

Пример с бесконечностью: http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image026.gif, Разбираемся, что такое http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image028.gif? Это тот случай, когда http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image008_0000.gif неограниченно возрастает, то есть: сначала http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image031.gif, потом http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image033.gif, потом http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image035.gif, затем http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image037.gif и так далее до бесконечности.

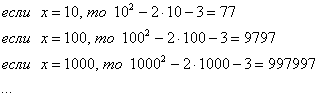
А что в это время происходит с функцией http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image039.gif? http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image041.gif, http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image043.gif, http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image045.gif, …

**Итак: если http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image028_0000.gif, то функция http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image039_0000.gif стремится к минус бесконечности**:

http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image047.gif

**Грубо говоря, согласно нашему первому правилу, мы вместо «икса» подставляем в функцию  http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image049.gif бесконечность и получаем ответ**.

Еще один пример с бесконечностью: http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image051.gif

Опять начинаем увеличивать http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image008_0001.gif до бесконечности и смотрим на поведение функции:  


**Вывод: при http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image028_0001.gif функция http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image056.gif  неограниченно возрастает**: http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image058.gif

Запомните простейшие виды пределов:

http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image060.gif, http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image062.gif, http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image064.gif, http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image066.gif, http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image068.gif, http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image070.gif, http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image072.gif, http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image074.gif, http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image076.gif, http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image078.gif  
Если где-нибудь есть сомнения, то можете взять в руки калькулятор и немного потренироваться.  
В том случае, если **http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image028_0002.gif**, попробуйте построить последовательность  http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image031_0000.gif, http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image033_0000.gif, http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image035_0000.gif. Если http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image080.gif, то  http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image082.gif, http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image084.gif, http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image086.gif.

Также обратите внимание на следующую вещь. Даже если дан предел с большим числом вверху, да хоть с миллионом: http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image088.gif, то все равно http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image090.gif, **так как рано или поздно «икс» начнёт принимать такие гигантские значения, что миллион по сравнению с ними будет самым настоящим микробом**.

Что нужно запомнить и понять из вышесказанного?

**1) Когда дан любой предел, сначала просто пытаемся подставить число в функцию.**

**2) Вы должны понимать и сразу решать простейшие пределы, такие как http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image092.gif, http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image094.gif, http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image096.gif и т.д.**

**Пределы с неопределенностью вида http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image098.gif и метод их решения**

Сейчас мы рассмотрим группу пределов, когда **http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image028_0003.gif**, а функция представляет собой дробь, в числителе и знаменателе которой находятся многочлены

**Пример 1:** Вычислить предел http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image100.gif

Согласно нашему правилу попытаемся подставить бесконечность в функцию. Что у нас получается вверху? Бесконечность. А что получается внизу? Тоже бесконечность. Таким образом, у нас есть так называемая неопределенность вида http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image098_0000.gif. Можно было бы подумать, что http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image102.gif, и ответ готов, но в общем случае это вовсе не так, и нужно применить некоторый прием решения, который мы сейчас и рассмотрим.

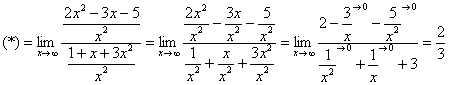
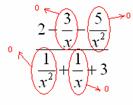
Как решать пределы данного типа?

Сначала мы смотрим на числитель и находим http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image008_0002.gif в старшей степени:  
http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image105.jpg Старшая степень в числителе равна двум.

Теперь смотрим на знаменатель и тоже находим http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image008_0003.gif в старшей степени: http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image107.jpg  
Старшая степень знаменателя равна двум.

Затем мы выбираем самую старшую степень числителя и знаменателя: в данном примере они совпадают и равны двойке.

Итак, метод решения следующий: **для того, чтобы раскрыть неопределенность http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image098_0001.gif необходимо разделить числитель и знаменатель на http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image008_0004.gif в старшей степени**.

http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image109.gif Разделим числитель и знаменатель на http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image111.gif  
  Вот оно как, ответ http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image115.gif, а вовсе не бесконечность. Все зависит от **степен**и сверху и снизу, поэтому ответ может быть конкретным числом, 0 или ∞.

**Пределы с неопределенностью вида http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image150.gif и метод их решения**

В числителе и знаменателе находятся многочлены, но «икс» стремится уже не к бесконечности, а к *конечному числу*.

**Пример 2.**  Решить предел http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image152.gif  
Сначала попробуем подставить -1 в дробь: http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image154.gif , В данном случае получена так называемая **неопределенность** http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image156.gif.

**Общее правило**: если в числителе и знаменателе находятся многочлены, и имеется неопределенности вида http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image156_0000.gif, то для ее раскрытия **нужно разложить числитель и знаменатель на множители**.

Для этого чаще всего нужно решить квадратное уравнение и (или) использовать формулы сокращенного умножения.

Итак, решаем наш предел: http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image158.gif

Разложим числитель и знаменатель на множители

Для того чтобы разложить числитель на множители, нужно решить квадратное уравнение:  
http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image160.gif  
Сначала находим дискриминант:  
http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image162.gif, И квадратный корень из него: http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image164.gif.

Далее находим корни:  
http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image166.gif, http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image168.gif

Таким образом: http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image170.gif

Всё. Числитель на множители разложен.

Знаменатель. Знаменатель http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image172.gif уже является простейшим множителем, и упростить его никак нельзя.

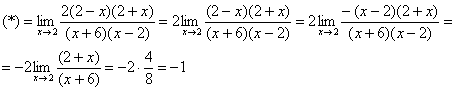
http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image174.gif, Очевидно, что можно сократить на http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image176.gif:

http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image178.gif Теперь и подставляем -1 в выражение, которое осталось под знаком предела: http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image180.gif

**Пример 3:** Вычислить предел http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image187.gif

Сначала «чистовой» вариант решения: http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image189.gif

Разложим числитель и знаменатель на множители. Числитель: http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image191.gif  
Знаменатель: http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image193.gif, http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image195.gif, http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image197.gif,http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image199.gif, http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image201.gif, http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image203.gif



Что важного в данном примере? Во-первых, Вы должны хорошо понимать, как раскрыт числитель, сначала мы вынесли за скобку 2, а затем использовали формулу разности квадратов. Рекомендация: **Если в пределе (практически любого типа) можно вынести число за скобку, то всегда это делаем.**  
*В ходе решения фрагмент типа http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image207.gif встречается очень часто. Сокращать такую дробь****нельзя****. Сначала нужно поменять знак у числителя или у знаменателя (вынести -1 за скобки).*  
*http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image209.gif, то есть появляется знак «минус», который при вычислении предела учитывается и терять его совсем не нужно.*

**Задание для обязательного выполнения:**

1. Прочитать теоретический материал, выписать формулы.
2. Решить **самостоятельно** и прикрепить к сайту:

Пример 1: Найти предел http://www.mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image121.gif

Пример 2:  Вычислите: https://xn--j1ahfl.xn--p1ai/data/images/u125149/t1488270615al.png

Пример 3 : Вычислите: https://xn--j1ahfl.xn--p1ai/data/images/u125149/t1488270615be.png

Пример 4: Вычислите: https://xn--j1ahfl.xn--p1ai/data/images/u125149/t1488270615bp.png

Пример 5:  Вычислите: https://xn--j1ahfl.xn--p1ai/data/images/u125149/t1488270615bv.png

Пример 6:Вычислите: https://xn--j1ahfl.xn--p1ai/data/images/u125149/t1488270615cv.png

1. **Пройдите тестирование.**