**Урок №8.**

**Тема: Предел функции в точке и на бесконечности. Вычисление пределов.**

**Теоретическая часть:**

**Число *А*** называется ***пределом функции*** *f*(*x*) в точке *х0*, если для любого числа ε > 0 существует число δ > 0 (зависящее от ε) такое, что для всех  и удовлетворяю­щих неравенству , выполняется неравенство  .

Геометрический смысл этого определения состоит в том, что если число *А* является пределом функции *f*(*x*) в точке *х0*, то для всех значений аргумента *х*, содержащихся в δ – окрестности точки *х0* , соот­ветствующие значения функции попадут в ε – окрестность числа *А*(рис. 1):



Рис.1.

**Любой предел состоит из трех частей**: например: 

1) Всем известного значка предела . (лимит-ограничение)
2) Записи под значком предела, в данном случае . Запись читается «икс стремится к единице». Чаще всего – именно , хотя вместо «икса» на практике встречаются и другие переменные. В практических заданиях на месте единицы может находиться совершенно любое число, а также бесконечность ().
3) Функции под знаком предела, в данном случае .

Сама запись  читается так: «предел функции  при икс стремящемуся к единице».

Разберем следующий важный вопрос – а что значит выражение «икс **стремится** к единице»? И что вообще такое «стремится»?
Понятие предела – это понятие, если так можно сказать, **динамическое**. Построим последовательность: сначала , затем , , …, , ….
То есть выражение «икс **стремится** к единице» следует понимать так – «икс» последовательно принимает значения, **которые бесконечно близко приближаются к единице и практически с ней совпадают**.

Как решить вышерассмотренный пример? Исходя из вышесказанного, нужно просто подставить единицу в функцию, стоящую под знаком предела:



Пример с бесконечностью: , Разбираемся, что такое ? Это тот случай, когда  неограниченно возрастает, то есть: сначала , потом , потом , затем  и так далее до бесконечности.

А что в это время происходит с функцией ? , , , …

**Итак: если , то функция  стремится к минус бесконечности**:



**Грубо говоря, согласно нашему первому правилу, мы вместо «икса» подставляем в функцию   бесконечность и получаем ответ**.

Еще один пример с бесконечностью: 

Опять начинаем увеличивать  до бесконечности и смотрим на поведение функции:


**Вывод: при  функция   неограниченно возрастает**: 

Запомните простейшие виды пределов:

, , , , , , , , , 
Если где-нибудь есть сомнения, то можете взять в руки калькулятор и немного потренироваться.
В том случае, если ****, попробуйте построить последовательность  , , . Если , то  , , .

Также обратите внимание на следующую вещь. Даже если дан предел с большим числом вверху, да хоть с миллионом: , то все равно , **так как рано или поздно «икс» начнёт принимать такие гигантские значения, что миллион по сравнению с ними будет самым настоящим микробом**.

Что нужно запомнить и понять из вышесказанного?

**1) Когда дан любой предел, сначала просто пытаемся подставить число в функцию.**

**2) Вы должны понимать и сразу решать простейшие пределы, такие как , ,  и т.д.**

**Пределы с неопределенностью вида  и метод их решения**

Сейчас мы рассмотрим группу пределов, когда ****, а функция представляет собой дробь, в числителе и знаменателе которой находятся многочлены

**Пример 1:** Вычислить предел 

Согласно нашему правилу попытаемся подставить бесконечность в функцию. Что у нас получается вверху? Бесконечность. А что получается внизу? Тоже бесконечность. Таким образом, у нас есть так называемая неопределенность вида . Можно было бы подумать, что , и ответ готов, но в общем случае это вовсе не так, и нужно применить некоторый прием решения, который мы сейчас и рассмотрим.

Как решать пределы данного типа?

Сначала мы смотрим на числитель и находим  в старшей степени:
 Старшая степень в числителе равна двум.

Теперь смотрим на знаменатель и тоже находим  в старшей степени: 
Старшая степень знаменателя равна двум.

Затем мы выбираем самую старшую степень числителя и знаменателя: в данном примере они совпадают и равны двойке.

Итак, метод решения следующий: **для того, чтобы раскрыть неопределенность  необходимо разделить числитель и знаменатель на  в старшей степени**.

 Разделим числитель и знаменатель на 
  Вот оно как, ответ , а вовсе не бесконечность. Все зависит от **степен**и сверху и снизу, поэтому ответ может быть конкретным числом, 0 или ∞.

**Пределы с неопределенностью вида  и метод их решения**

В числителе и знаменателе находятся многочлены, но «икс» стремится уже не к бесконечности, а к *конечному числу*.

**Пример 2.**  Решить предел 
Сначала попробуем подставить -1 в дробь:  , В данном случае получена так называемая **неопределенность** .

**Общее правило**: если в числителе и знаменателе находятся многочлены, и имеется неопределенности вида , то для ее раскрытия **нужно разложить числитель и знаменатель на множители**.

Для этого чаще всего нужно решить квадратное уравнение и (или) использовать формулы сокращенного умножения.

Итак, решаем наш предел: 

Разложим числитель и знаменатель на множители

Для того чтобы разложить числитель на множители, нужно решить квадратное уравнение:

Сначала находим дискриминант:
, И квадратный корень из него: .

Далее находим корни:
, 

Таким образом: 

Всё. Числитель на множители разложен.

Знаменатель. Знаменатель  уже является простейшим множителем, и упростить его никак нельзя.

, Очевидно, что можно сократить на :

 Теперь и подставляем -1 в выражение, которое осталось под знаком предела: 

**Пример 3:** Вычислить предел 

Сначала «чистовой» вариант решения: 

Разложим числитель и знаменатель на множители. Числитель: 
Знаменатель: , , ,, , 



Что важного в данном примере? Во-первых, Вы должны хорошо понимать, как раскрыт числитель, сначала мы вынесли за скобку 2, а затем использовали формулу разности квадратов. Рекомендация: **Если в пределе (практически любого типа) можно вынести число за скобку, то всегда это делаем.**
*В ходе решения фрагмент типа  встречается очень часто. Сокращать такую дробь****нельзя****. Сначала нужно поменять знак у числителя или у знаменателя (вынести -1 за скобки).*
*, то есть появляется знак «минус», который при вычислении предела учитывается и терять его совсем не нужно.*

**Задание для обязательного выполнения:**

1. Прочитать теоретический материал, выписать формулы.
2. Решить **самостоятельно** и прикрепить к сайту:

Пример 1: Найти предел 

Пример 2:  Вычислите: 

 Пример 3 : Вычислите: 

Пример 4: Вычислите: 

 Пример 5:  Вычислите: 

 Пример 6:Вычислите: 

1. **Пройдите тестирование.**